Les maîtres des formules

Conférence 1

mathématiques et sciences physiques :

Des relations étroites, multiformes et fécondes

Conférencier :
Fernand MALONGA MOUNGABIO
Ecole Normale Supérieure
malongaf@gmail.fr

Modérateur :
Jannick TRUNKENWALD
Lycée Français Saint Exupéry

Les mathématiques …

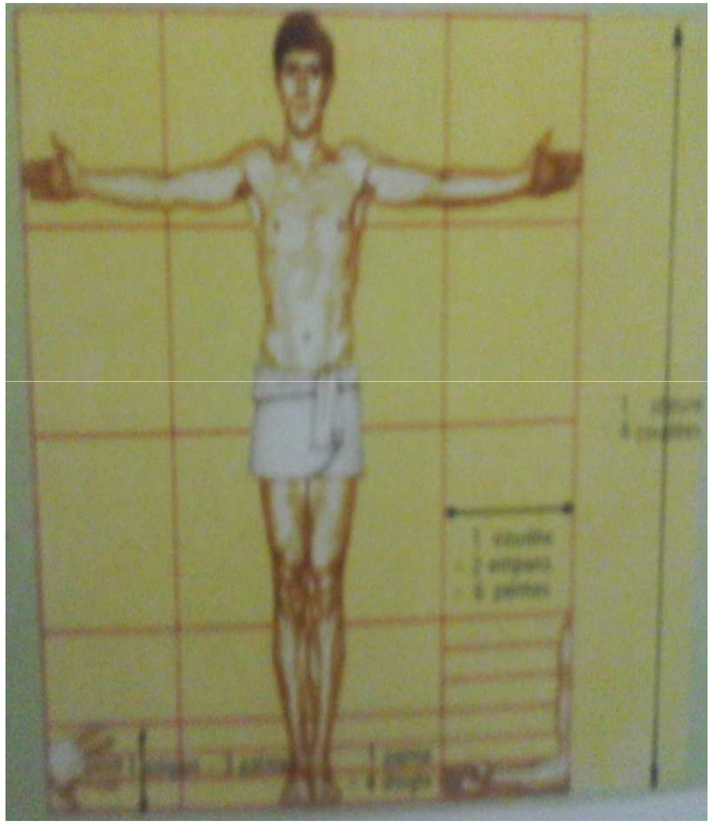
- Système de pensées organisées, en perpétuelle expansion.
- Utilisées dans presque tous les domaines de l’activité humaine.
- Ont contribuées à l’évolution des civilisations, de la science.
- …

Développement des domaines mathématiques

- Concept de nombre et de calcul émergent à partir des combinaisons de collections finies : **Algèbre**.

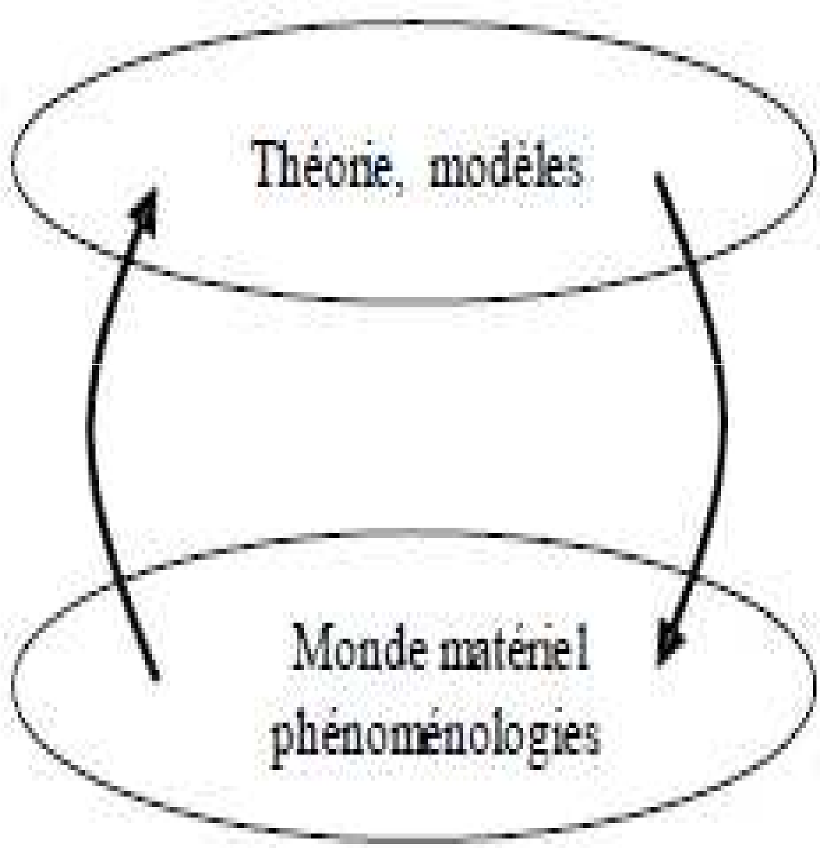
- Mesure du temps et de l'espace conduit à la **géométrie** et à **l'astronomie**

- L'étude des notions de continuités et de limites a permis le développement du **calcul infinitésimal**



Mathématiques et autres sciences

La pensée mathématique est le résultat d'une opération de l'esprit qui consiste à substituer, par abstraction, une structure mentale (modèles mathématiques) à une structure physique donnée.



Modélisation comme mise en relation des deux mondes

Mathématiques et physique

Quels sont les premiers physiciens ?
Des mathématiciens !

Quels sont les premiers mathématiciens ?
Des physiciens !

L'histoire montre en effet comment les champs scientifiques que sont aujourd'hui les mathématiques et la physique ont fait évoluer la science en se prêtant à un jeu d'échanges dialectiques

Mathématiques et physique

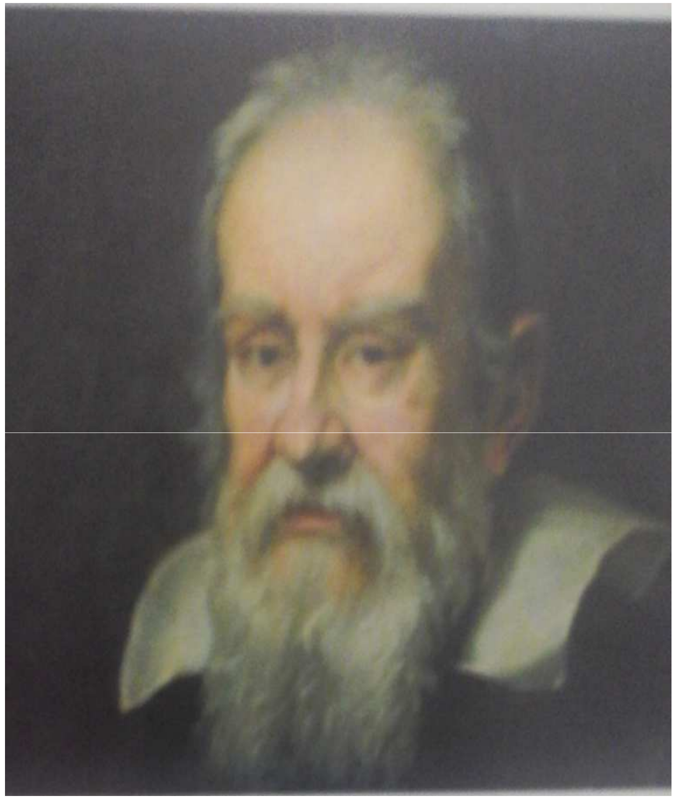
Le rôle important joué par les mathématiques dans le développement de la physique tourne essentiellement autour de deux statuts : *langage* et *outil.*

Une dichotomie … selon Aristote (384 – 322, av. J.-C.)

Terre	Ciel
Lieu de la génération et de la corruption Lieu du changement : changement d'état, ou changement de position dans l'espace = mouvement (local) Ces mouvements peuvent être naturels ou violents. Le mouvement naturel sera vers le haut (si le corps est léger), ou vers le bas si le corps est lourd La science qui s'occupe de cette partie est la physique (une physique de qualité).	Lieu des astres, parfaits, sphériques, impondérables. Soumis à des mouvements parfaits (circulaires, uniformes) La science qui s'occupe de cette partie est constituée des mathématiques, réparties selon le quadrivium : - Arithmétique, pour le nombre; - Géométrie, pour les grandeurs continues; - Astronomie - Musique.

Galilée (1564-1642) : décloisonnement …

La fissuration et l’éclatement de la cloison séparant les mathématiques de la physique supposent des modifications radicales et profondes tant du côté de la physique, dans sa façon de comprendre la nature et en particulier le mouvement, que du côté des mathématiques.



Traitement mathématique de la vitesse

Le concept de vitesse est exemplaire pour montrer comment une notion liée de façon vague au changement est emmenée par la pensée rationnelle à un traitement mathématique.

Galilée et la loi de la chute des corps

Aristote (Hypothèse):

Les corps tombent avec une vitesse proportionnelle à leur poids.

Galilée:

La vitesse en chute libre (dans le vide) est la même pour tous les corps

Galilée et la loi de la chute des corps

Au début du XVII^{e} siècle, Galilée se propose, à partir de la loi de la vitesse d'un corps tombant en chute libre

$$v = kt, \qquad (k \text{ étant un réel})$$

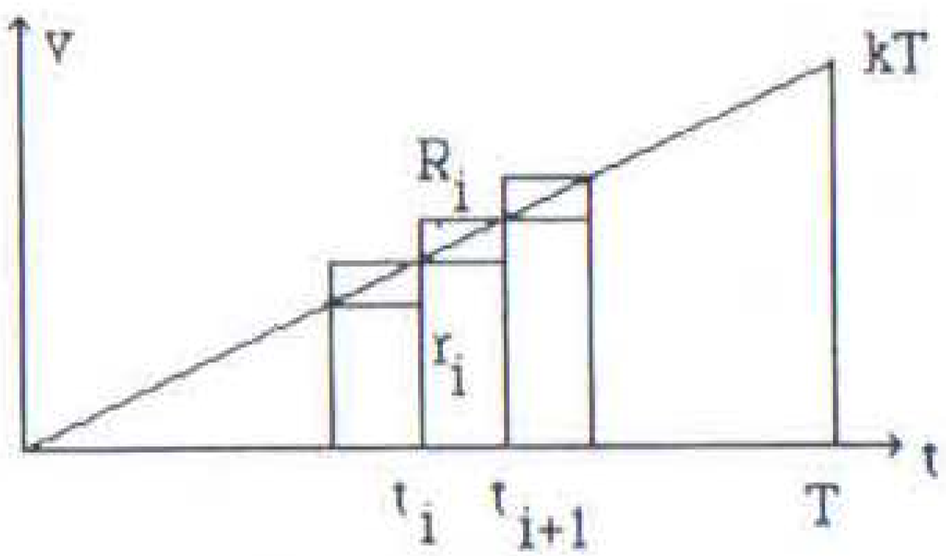
de retrouver la loi du chemin x parcouru en fonction du temps

La vitesse est proportionnelle au temps.

fonction $t \to x(t)$ et x est une primitive de la fonction $t \to kt$, donc $x(t) = \frac{1}{2}kt^2$, si $x(0) = 0$

On trace la courbe représentant v fonction de t, on découpe l'intervalle de temps $[0, T]$ en petits intervalles égaux $[t_i, t_{i+1}]$ sur lesquels la vitesse est comprise entre kt_i et kt_{i+1}.

Durée entre deux instant $h = \frac{T}{n}$



$$v = kT$$

$$x = \frac{1}{2} kT^2$$

$$v_i < v < v_{i+1}$$

$$hkt_i < hv < hkt_{i+1}$$

$$hkt_i < x < hkt_{i+1}$$ ou , Aire (r_i) < x < Aire (R_i)

Majoration des écarts entre les aires

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} kh(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{i=n-1} k\frac{T^2}{n^2} = k\frac{T^2}{n}$$

x correspond à l'aire du triangle

$$x = \frac{1}{2}kT^2$$

Théorème I – Proposition I

Si un mobile animé d'un mouvement uniforme parcourt, avec une même vitesse, deux distances, les temps des mouvements seront entre eux comme les distances parcourues.

Pour *v* donné

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{e_1}{e_2}$$

Théorème II – Proposition II

Si un mobile deux distances en des temps égaux, ces distances seront entre elles comme les vitesses. Et si les distances sont comme les vitesses, les temps seront égaux.

Si $t_1 = t_2$ alors

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

et réciproquement

Théorème III – Proposition III

Si un même espace est franchi avec des vitesses inégales, les temps seront en raison inverse des vitesses.

Pour *e* fixé

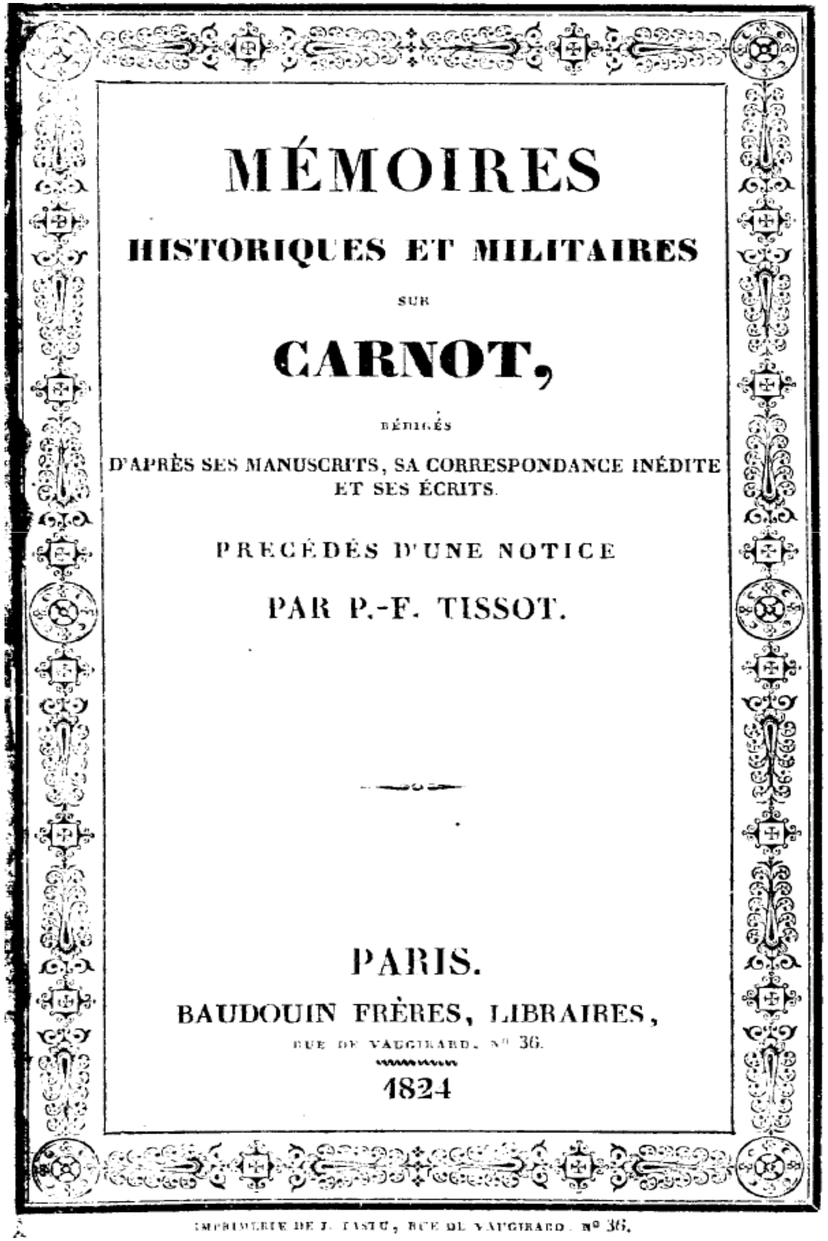
$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

Les mathématiques, langage de la physique

En 1824, Carnot publie un mémoire ne comportant aucune formule mathématique; il y énonce le deuxième principe de la thermodynamique.

Les mots ne suffisent plus pour interpréter et expliquer la physique.

Début du XIXe siècle :
Penser la physique qu'en termes mathématiques s'est imposé définitivement.


MÉMOIRES
HISTORIQUES ET MILITAIRES
SUR
CARNOT,
RÉDIGÉS
D'APRÈS SES MANUSCRITS, SA CORRESPONDANCE INÉDITE
ET SES ÉCRITS.
PRECÉDÉS D'UNE NOTICE
PAR P.-F. TISSOT.

PARIS.
BAUDOUIN FRÈRES, LIBRAIRES,
RUE DE VAUGIRARD, N° 36.
1824

IMPRIMERIE DE J. TASTU, RUE DE VAUGIRARD, N° 36.

Les mathématiques, langage de la physique

« Le grand livre de l'Univers est écrit dans le langage des mathématiques. On ne peut comprendre ce livre que si on en apprend tout d'abord le langage, et l'alphabet dans lequel il est rédigé. Les caractères en sont les triangles et les cercles, ainsi que les autres figures géométriques sans lesquelles il est humainement impossible d'en déchiffrer le moindre mot ».

Galilée (1623)

Les mathématiques, langage de la physique

Selon Heisenberg,

« *l'idée que les mathématiques peuvent s'adapter aux objets de notre expérience est remarquable et passionnante; notre connaissance de la nature est représentée par des formules* ».

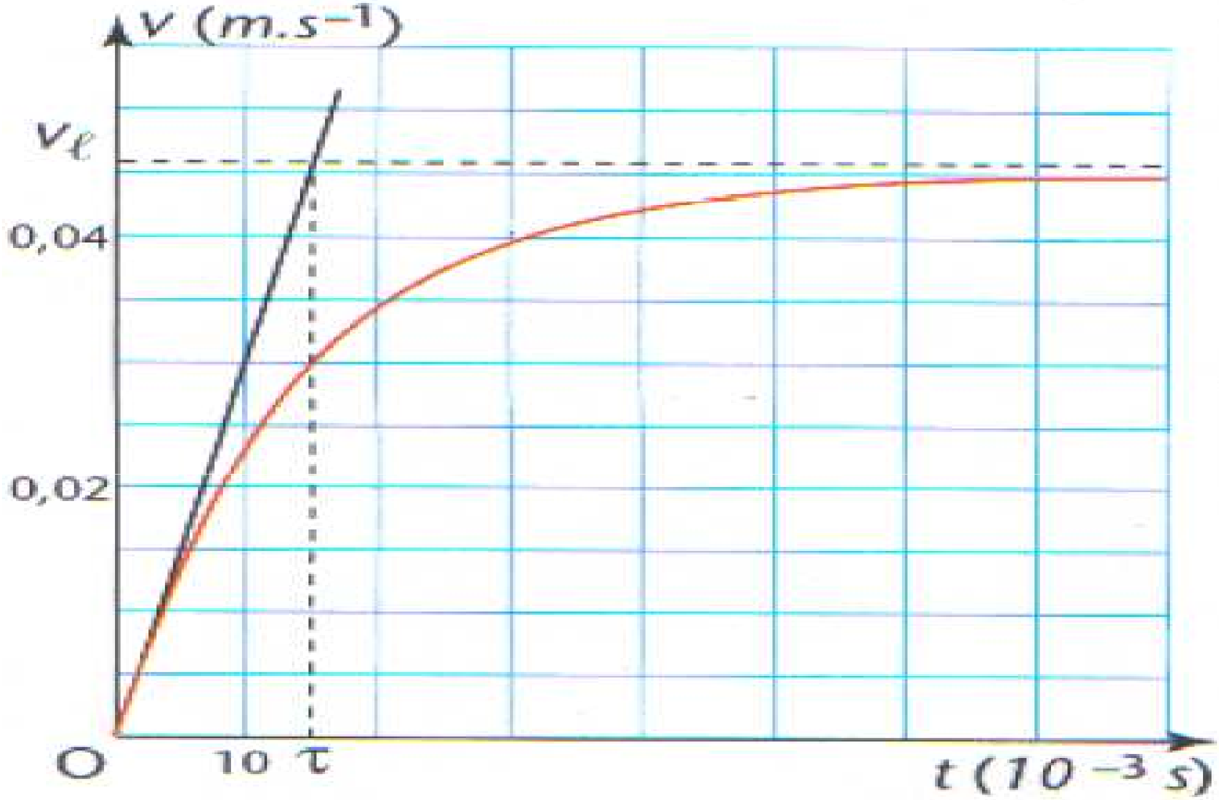
Les mathématiques, langage de la physique

Les équations de Maxwell, de Boltzmann ou de Schrödinger, les relations de Heisenberg ou d’Onsager, les formules de Newton ou d’Einstein, résument chacune une loi fondamentale de la physique, qu’il serait fastidieux, imprécis ou même impossible de traduire en mots.

Modélisation mathématique de l'évolution d'un corps dans un fluide en fonction du temps

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{f}{m}v + g$$

$$v = \frac{mg}{f}$$

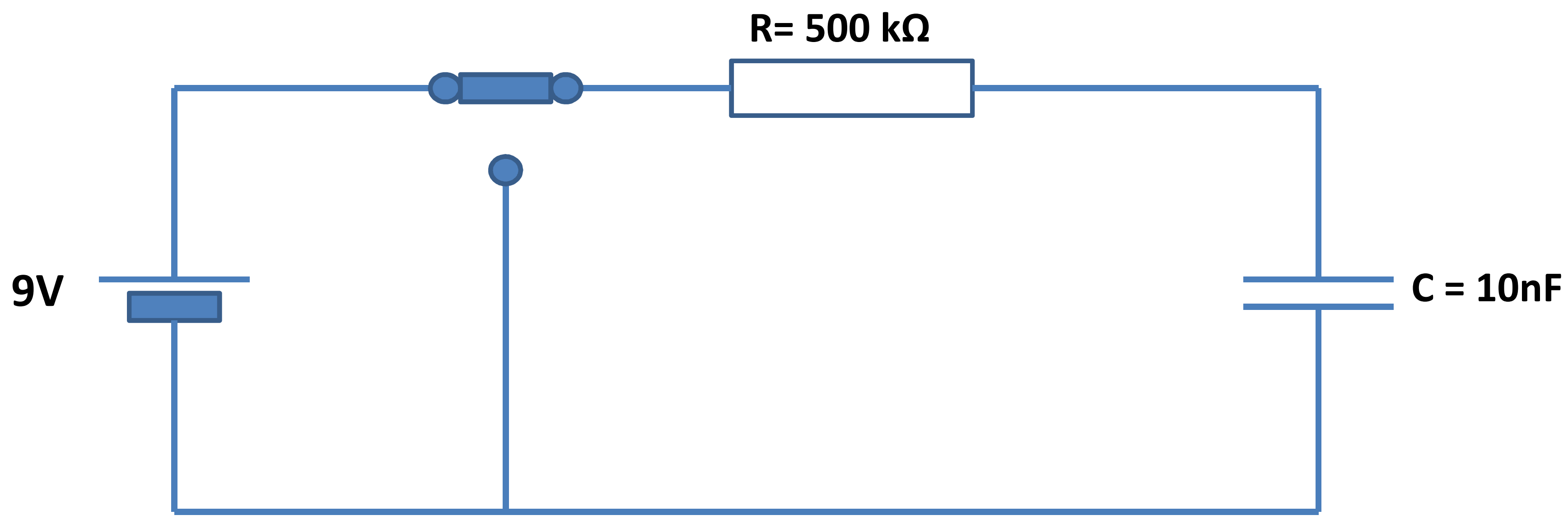


… lorsque la vitesse limite est théoriquement atteinte, le régime de la bille est permanent, c'est-à-dire que son mouvement peut être considéré comme uniforme. La résultante des forces extérieures s'annule.

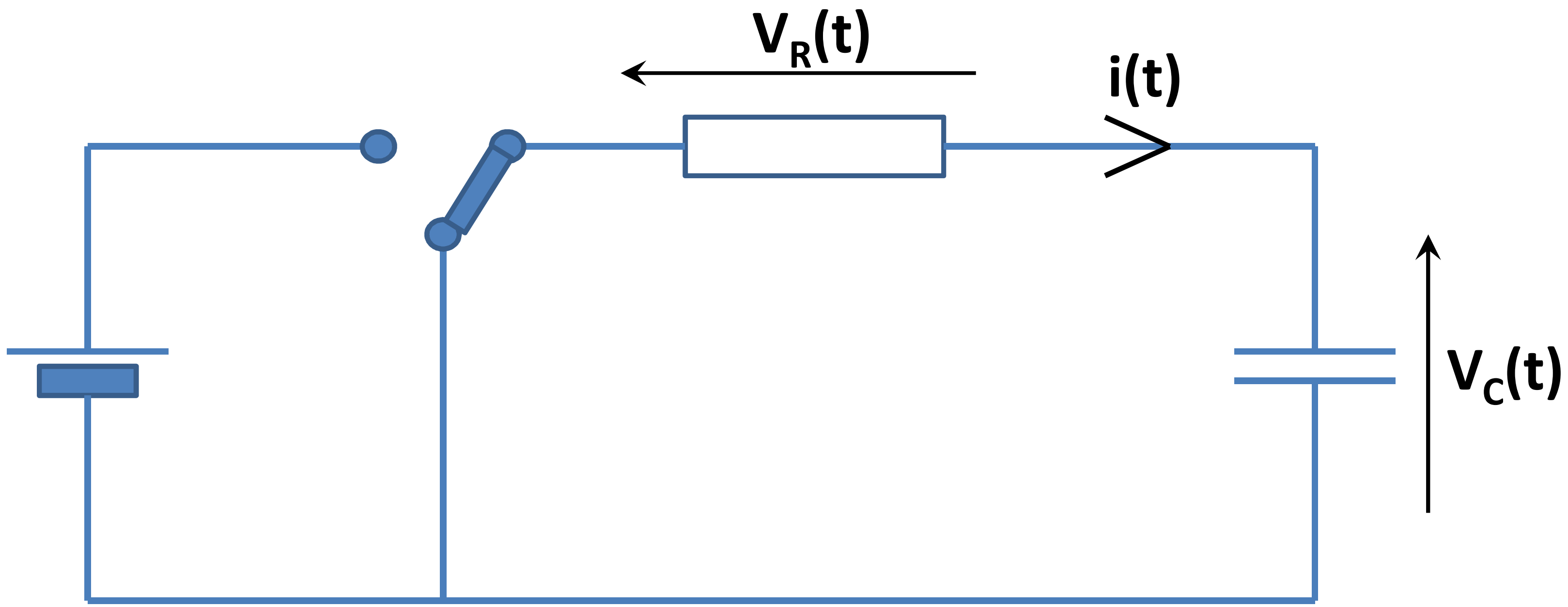
Décharge du condensateur

J. Trunkenwald
Lycée Saint-Exupéry
Brazzaville

Un condensateur est chargé en circuit RC par une pile de 9 V :



A l'instant t=0 , on bascule l'interrupteur :



Condition initiale : $V_C(0) = 0$

Loi d'Ohm aux bornes de la résistance R : $V_R(t) = R\, i(t)$

Charge aux bornes du condensateur : $q(t) = C\, V_C(t)$

On sait que $i(t) = q'(t) = C\, V_C'(t)$

De plus d'après la loi des mailles pour les tensions : $V_C(t) + V_R(t) = 0$

C'est-à-dire $V_C(t) + R\, i(t) = 0$

$V_C(t) + RC\, V_C'(t) = 0$

$$V_C'(t) = -\frac{1}{RC} V_C(t)$$

$$V_C'(t) = -\frac{1}{RC} V_C(t).$$

Posons $$f(t) = \frac{V_C(t)}{e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

Alors $$f'(t) = \frac{V_C'(t)\, e^{-\frac{1}{RC}t} - V_C(t)\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{1}{RC}t}}{\left(e^{-\frac{1}{RC}t}\right)^2}$$

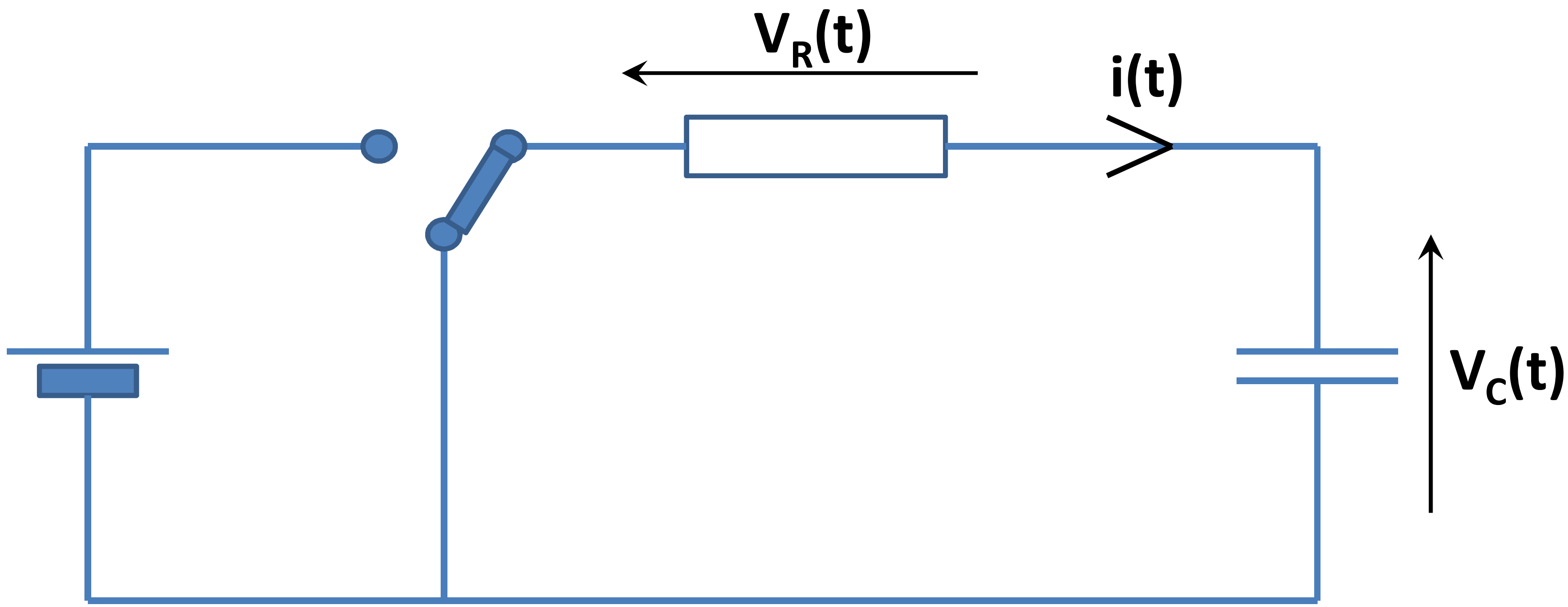
$$= \frac{V_C'(t)\, e^{-\frac{1}{RC}t} - V_C(t)\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{1}{RC}t}}{\left(e^{-\frac{1}{RC}t}\right)^2} = 0$$

D'où $f(t)$ est une constante que l'on notera K.

C'est à dire $$\frac{V_C(t)}{e^{-\frac{1}{RC}t}} = K .$$

Et enfin $$V_C(t) = K\, e^{-\frac{1}{RC}t}$$

A l'instant t=0 , on bascule l'interrupteur :



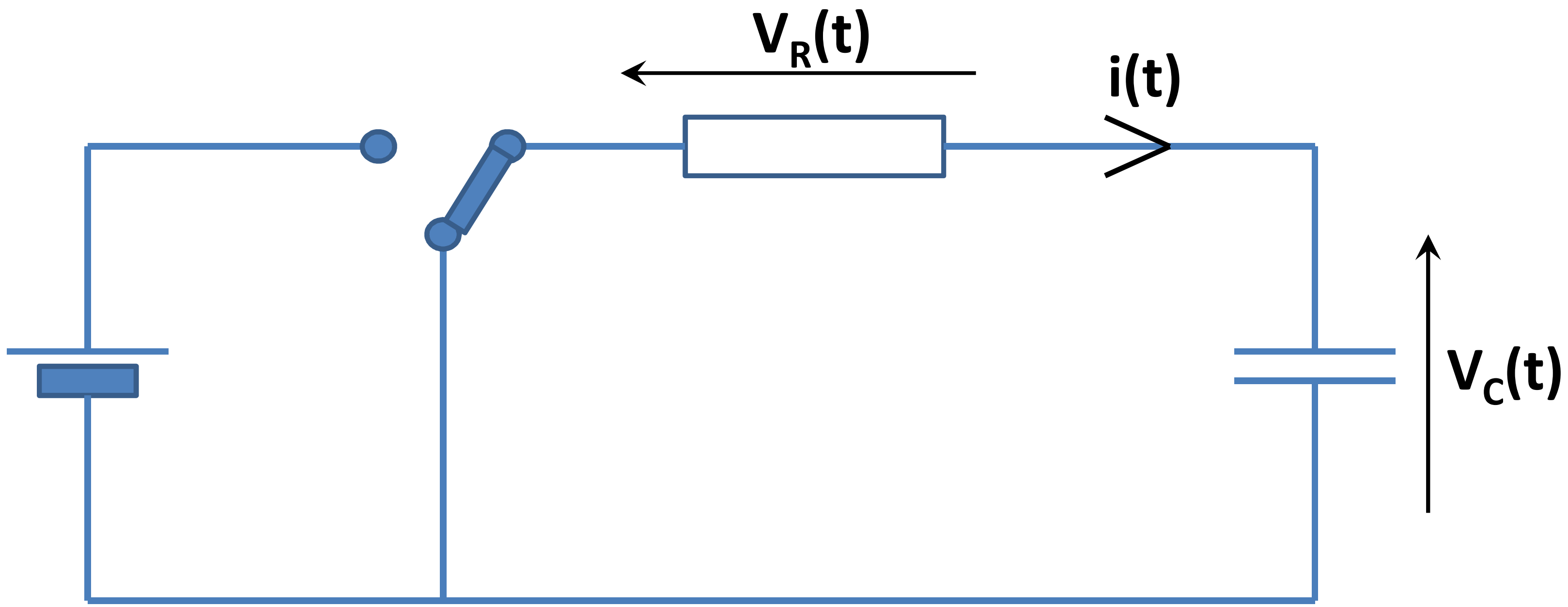
$$V_C'(t) = -\frac{1}{RC} V_C(t) \quad \text{entraîne donc} \quad V_C(t) = K\, e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Et d'après la condition initiale : $9 = V_C(0) = K\, e^{-\frac{1}{RC}0}$

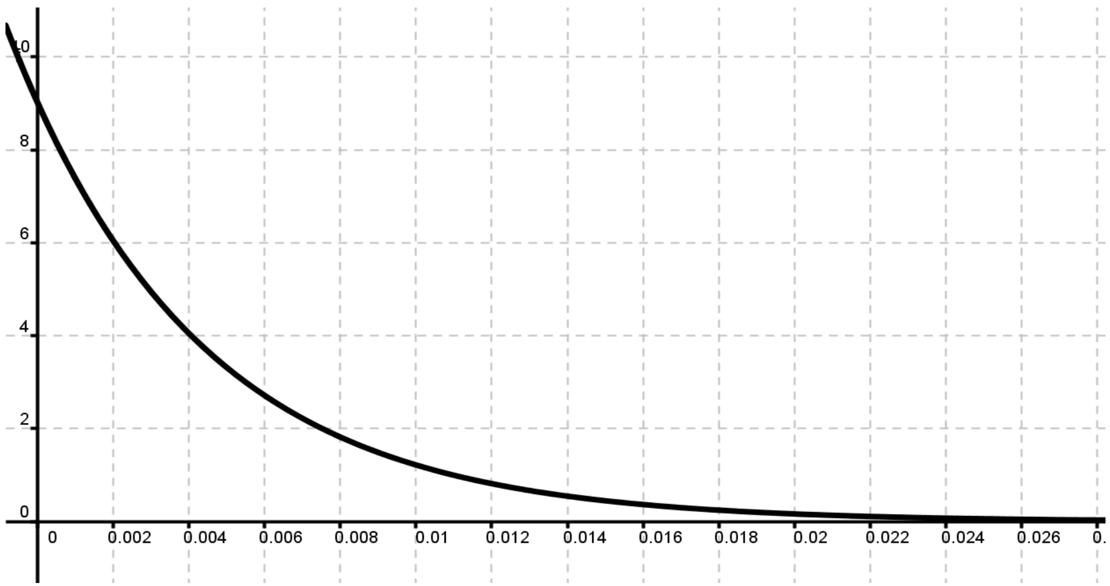
D'où $V_C(t) = 9\, e^{-\frac{1}{RC}t}$

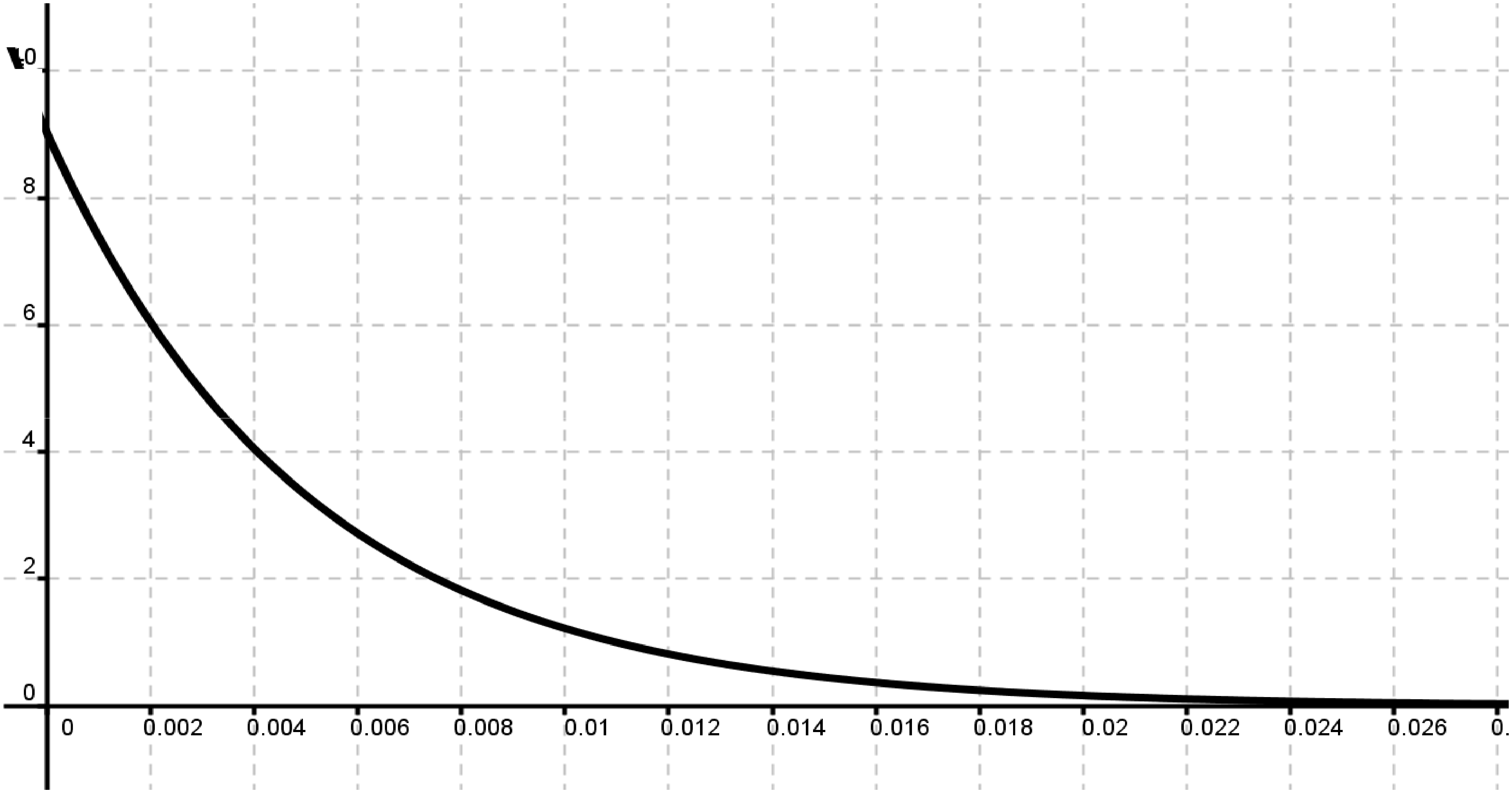
C'est à dire : $V_C(t) = 9\, e^{-200\, t}$

A l'instant t=0 , on bascule l'interrupteur :



$$V_C(t) = 9\, e^{-200\,t}$$





V
10
8
6
4
2
0
0
0.002
0.004
0.006
0.008
0.01
0.012
0.014
0.016
0.018
0.02
0.022
0.024
0.026

TRAJECTOIRE D'UN MOUVEMENT A ACCELERATION CENTRALE

J. Trunkenwald

Conférence du 25/11/15

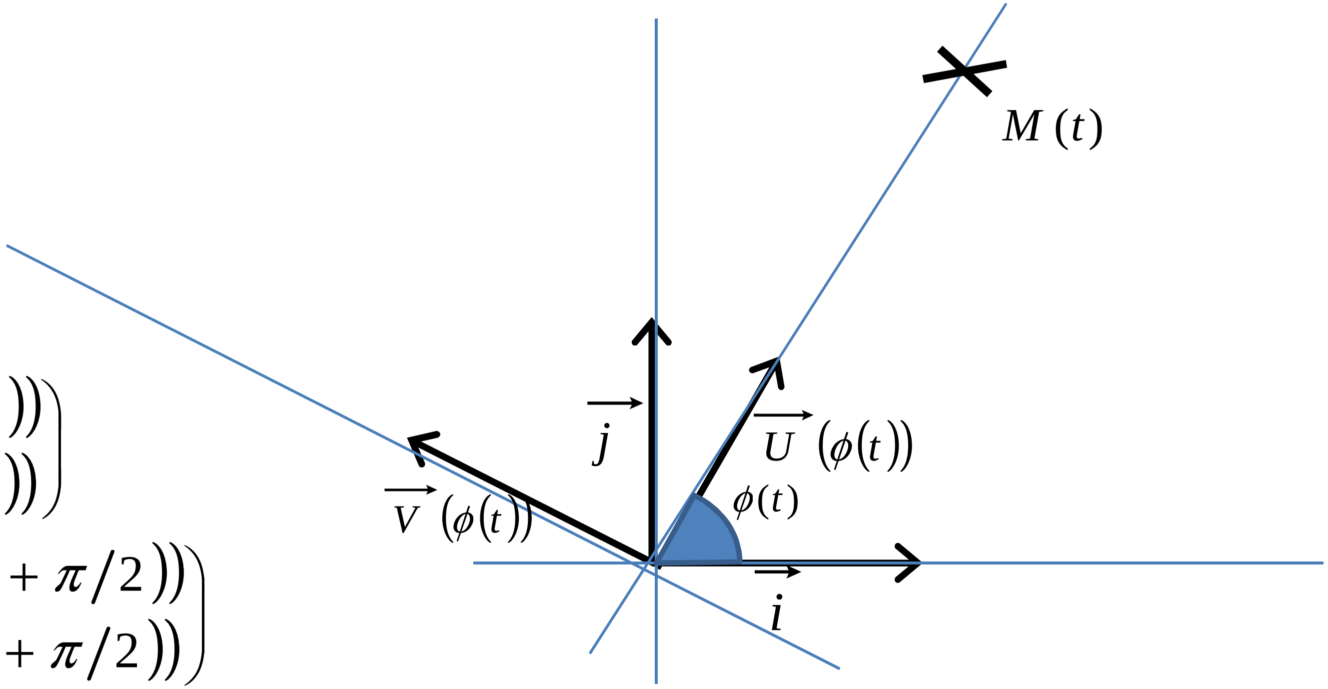
à l'IFC de Brazzaville

Johanes Kepler (1571-1630)

Poursuivi pour ses convictions religieuses et ses idées coperniciennes, Johannes Kepler doit quitter Graz en 1600. Il se réfugie à Prague, invité par l'astronome danois Tycho Brahe pour y devenir son assistant. Leurs relations furent houleuses ; Tycho Brahe ne croyant pas à l'héliocentrisme de Copernic mais soutenant une autre théorie dans laquelle la Terre est au centre mais les autres planètes tournent autour du Soleil.
Kepler voyait en Tycho Brahe un homme plein de richesses mais qui ne savait les exploiter correctement.

Atteint de myopie et de diplopie à la naissance, Kepler s'appuie sur les observations de Brahe pour élaborer ses théories. Brahe lui demanda de calculer l'orbite précise de Mars.
Pensant accomplir sa tâche en quelques semaines, il lui fallut près de six ans pour achever son travail. Durant ce travail, il découvrit les deux lois fondamentales :
* Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil est un foyer.
* Le mouvement de chaque planète est tel que le segment de droite reliant le Soleil et la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.
Ces lois furent publiées dans *Astronomia Nova* en 1609, où Johannes Kepler fut également le premier à émettre l'hypothèse d'une rotation du Soleil sur son axe.
En 1618 viendra sa troisième grande loi :
* Pour toutes les planètes, le rapport entre le cube du demi grand axe de la trajectoire et le carré de la période est le même — cette constante est indépendante de la masse de la planète.

Paramétrage polaire



$$\vec{U}(\phi(t)) = \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}(\phi(t)) = \begin{pmatrix} \cos(\phi(t+\pi/2)) \\ \sin(\phi(t+\pi/2)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{U}(\phi(t)) = \begin{pmatrix} -\phi'(t)\sin(\phi(t)) \\ \phi'(t)\cos(\phi(t)) \end{pmatrix} = \phi'(t)\,\vec{V}(\phi(t))$$

$$\frac{d}{dt}\vec{V}(\phi(t)) = \begin{pmatrix} -\phi'(t)\cos(\phi(t)) \\ -\phi'(t)\sin(\phi(t)) \end{pmatrix} = -\phi'(t)\,\vec{U}(\phi(t))$$

Equations horaires

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{U}$$

$$\overrightarrow{v} = \boxed{\bar{r}\,\overrightarrow{U} + r\,\bar{\phi}\,\overrightarrow{V}}$$

$$\overrightarrow{a} = \overset{=}{r}\,\overrightarrow{U} + \bar{r}\,\bar{\phi}\,\overrightarrow{V} + \bar{r}\,\bar{\phi}\,\overrightarrow{V} + r\left(\overset{=}{\phi}\,\overrightarrow{V} - \bar{\phi}\,\bar{\phi}\,\overrightarrow{U}\right)$$

$$\overrightarrow{a} = \boxed{\left(\overset{=}{r} - r\,\bar{\phi}^{2}\right)\overrightarrow{U} + \left(2\,\bar{r}\,\bar{\phi} + r\,\overset{=}{\phi}\right)\overrightarrow{V}}$$

$$2\,\bar{r}\,r\,\bar{\phi} + r^{2}\,\overset{=}{\phi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^{2}\right)\bar{\phi} + r^{2}\frac{d}{dt}\left(\bar{\phi}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^{2}\,\bar{\phi}\right) = 0$$

$$\boxed{r^{2}\,\bar{\phi} = C}$$

Un changement de variable :

Posons une nouvelle variable : $u = \dfrac{1}{r}$

$$\overline{u} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = u'\overline{\phi}$$

$$\overline{u'} = \frac{du'}{dt} = \frac{du'}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = u''\overline{\phi}$$

De plus, puisque $r^2\overline{\phi} = C$

Alors on en déduit : $\dfrac{1}{u^2}\overline{\phi} = C$

Formule de Binet pour la vitesse :

Rappel : $u = \dfrac{1}{r}$ $\qquad \bar{u} = u'\,\bar{\phi}$ $\qquad \dfrac{1}{\mathrm{u}^2}\,\bar{\phi} = C$

$$\overrightarrow{v} = \bar{r}\,\overrightarrow{U} + r\,\bar{\phi}\,\overrightarrow{V}$$

$$= \overline{\left(\frac{1}{u}\right)}\,\overrightarrow{U} + \frac{1}{u}\,\bar{\phi}\,\overrightarrow{V}$$

$$= -\frac{\bar{u}}{u^2}\,\overrightarrow{U} + \frac{1}{u}\,\bar{\phi}\,\overrightarrow{V}$$

$$= -\frac{u'\,\bar{\phi}}{u^2}\,\overrightarrow{U} + u\,C\,\overrightarrow{V}$$

$$= -u'\,C\,\overrightarrow{U} + u\,C\,\overrightarrow{V} = \boxed{C\left(-u'\,\overrightarrow{U} + u\,\overrightarrow{V}\right)}$$

Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856)

Entre à l'École polytechnique en 1804, il devient répétiteur de géométrie descriptive, puis professeur de mécanique, puis inspecteur des études de 1816 à 1830.
Professeur de mathématiques spéciales au collège royal de Bourbon, et chaire d'astronomie au Collège de France en 1823. Comme son ami Augustin Louis Cauchy , Binet est un catholique convaincu et dévoué aux Bourbons. Le Gouvernement de Juillet lui retire ses fonctions à l'École polytechnique, mais lui conserve sa chaire au Collège de France. Président de l'Académie des sciences en 1855, on lui doit des mémoires importants.

Ses travaux sur le calcul matriciel l'ont amené à trouver l'expression du n-ième terme de la suite des nombres de Fibonacci.
En astronomie, ses formules de cinématique donnent l'expression en coordonnées polaires de la vitesse et de l'accélération des corps soumis à une accélération centrale, telles les planètes du système solaire.

Formule de Binet pour l'accélération :

Rappel : $u = \dfrac{1}{r}$ $\qquad \bar{u} = u' \bar{\phi}$ $\qquad \overline{u'} = u'' \bar{\phi}$

$$\frac{1}{u^2} \bar{\phi} = C$$

$$\vec{v} = C \left(-u' \vec{U} + u \vec{V} \right)$$

$$\vec{a} = C \left(-u'' \bar{\phi} \vec{U} - u' \bar{\phi} \vec{V} + u' \bar{\phi} \vec{V} - u \bar{\phi} \vec{U} \right)$$

$$= C \left(-u'' \bar{\phi} \vec{U} - u \bar{\phi} \vec{U} \right)$$

$$= C \left(-u'' C u^2 \vec{U} - C u^3 \vec{U} \right)$$

$$= \boxed{-C^2 u^2 (u'' + u)}$$

Application à la loi d'attraction universelle

$$m\,\overrightarrow{a} \quad = \quad -\frac{G}{r^2}\,\overrightarrow{U} \quad = \quad -G\,u^2\,\overrightarrow{U}$$

$$-m\,C^2\,u^2\left(u''+u\right) \quad = \quad -G\,u^2$$

On obtient alors l'équation différentielle : $u''+u = \dfrac{G}{m\,C^2}$

dont la fonction constante $u_p(\phi) = \dfrac{G}{m\,C^2}$ est une solution particulière

et dont les solutions générales de l'équation sans second membre sont de la forme : $u_G(\phi) = \mathrm{K}\cos\left(\phi+\varphi\right)$

On en déduit que : $u(\phi) = u_p(\phi) + u_G(\phi)$

$$= \boxed{\mathrm{K}\cos\left(\phi+\varphi\right) + \frac{G}{m\,C^2}}$$

Forme polaire de la trajectoire :

$$u(\phi) = \mathrm{K}\cos(\phi + \varphi) + \frac{G}{m\,C^2}$$

$$r(\phi) = \frac{1}{\mathrm{K}\cos(\phi + \varphi) + \dfrac{G}{m\,C^2}}$$

Donc $$r(\phi) = \frac{\dfrac{m\,C^2}{G}}{1 + \mathrm{K}\dfrac{m\,C^2}{G}\cos(\phi + \varphi)} = \frac{p}{1 + e\cos(\phi + \varphi)}$$

qui est l'équation polaire d'une conique :

* Excentricité : $e = \mathrm{K}\dfrac{m\,C^2}{G}$

* Paramètre : $p = e \times \overline{OK} = \dfrac{m\,C^2}{G}$